

Глава 1.

Математический язык. Математическая модель.

§ 4*. Линейные уравнения с модулем и параметром.

1. Краткие теоретические сведения:

Модуль числа a ($|a|$) – это расстояние от точки 0 до точки A с координатой a . Выражение, стоящее под знаком модуля (внутри скобок) может быть как положительным, так и отрицательным, т.к. координата a может быть со знаком «+» или со знаком «-», но модуль этого выражения – всегда положительное число.

Параметр – это переменная, которая может принимать различные значения, наложенные на параметр условием задачи.

Условия существования корней линейного уравнения с одной переменной $ax + b = 0$:

1. Если $a = 0$ и $b = 0$, то получим равенство $0 \cdot x + 0 = 0$, значит корнем уравнения является любое число x (уравнение имеет бесконечно много корней), так как при подстановке любого числа в данное уравнение вместо переменной x , получим верное числовое равенство.
Ответ: $x \in R$ (x принадлежит множеству действительных чисел).
2. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то получим равенство $0 \cdot x + b = 0$, после преобразования получим $0 \cdot x = -b$, на 0 делить нельзя, поэтому в этом случае мы не сможем найти корень уравнения, т.е. уравнение не имеет корней. Ответ: $x \in \emptyset$ (x принадлежит пустому множеству).
3. Если $a \neq 0$ и b – любое число, то получим равенство $ax + b = 0$, после преобразования получим $x = -\frac{b}{a}$, причем полученное нами решение является единственным, т.е. других корней нет.

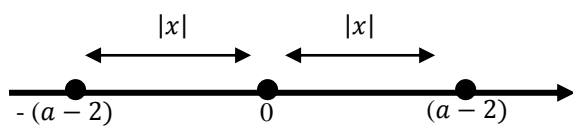
Ответ: $x = -\frac{b}{a}$

Пример 1: Определите при каких значениях параметра a уравнение $|x| = a - 2$ имеет 1 корень.

Решение: Чтобы понять, как решить данное уравнение, переведем его на обычный язык: «Определить при каких значениях переменной a (параметр) уравнение имеет 1 корень».

САМОЕ ГЛАВНОЕ, что Вы должны усвоить: параметр – это **ЧИСЛО!!!** Только «спрятанное» под буквой. А какое именно число, мы и должны выяснить.

Избавимся от модуля. Модуль x – это расстояние от нуля до точки с координатой x , значит расстояние от 0 до X равно по условию $(a - 2)$. Т.е. «шагнув» на данное расстояние, мы попадем в точку с координатой $(a - 2)$ или « $-(a - 2)$ ».



Примечание: координаты $(a - 2)$ или « $-(a - 2)$ » могут располагаться наоборот: $(a - 2) < 0 < -(a - 2)$, если $(a - 2) < 0$

Т.о. наше уравнение разбивается на 2 уравнения: $|x| = a - 2$

$$x = a - 2$$

$$x = -(a - 2)$$

Рассмотрим полученные уравнения. Каждое из них линейное с одной переменной x (напоминаю, параметр – это ЧИСЛО!!!). Каждое из этих уравнений имеет 1 корень, значит исходное уравнение имеет 2 корня. Нам нужно, по условию, задачи, чтобы корень был 1, это возможно ТОЛЬКО ТОГДА, когда корни 1-го и 2-го уравнения равны:

$$a - 2 = -(a - 2)$$

Вот мы и составили уравнение для нахождения параметра, осталось его решить:

$$a - 2 = -a + 2;$$

$$a + a = 2 + 2;$$

$$2a = 4;$$

$$a = 2.$$

Ответ: При $a = 2$, уравнение имеет 1 корень.

Пример 2: Решите уравнение с параметром $(a + 2)x = 3$

Решение: Решить линейное уравнение с параметром – это значит рассмотреть все случаи существования его корней (1 корень, бесконечно много корней, нет корней)

САМОЕ ГЛАВНОЕ: параметр – это ЧИСЛО!!! Только «спрятанное» под буквой.

Так как по условиям существования корней, линейное уравнение имеет бесконечно много корней только тогда, когда его можно привести к виду $0 \cdot x = 0$, а в данном уравнении свободный член равен 3, т.е. не ноль, следовательно, уравнение может либо иметь 1 корень, либо не иметь вообще.

1. Выясним, при каком значении параметра данное уравнение не имеет корней.

Это возможно, когда коэффициент при x равен 0, так как на ноль делить нельзя.

$$a + 2 = 0;$$

$$a = -2.$$

2. Во всех остальных случаях (при $a \neq -2$) заданное уравнение имеет 1 корень $x = \frac{3}{a+2}$

Ответ: При $a = -2$ уравнение не имеет корней. При $a \neq -2$ уравнение имеет 1 корень: $x = \frac{3}{a+2}$.

Пример 3: Решите уравнение с модулем $(a + 2)x = 3$

Решение: Решить линейное уравнение с параметром – это значит рассмотреть все случаи существования его корней (1 корень, бесконечно много корней, нет корней)

Решите самостоятельно:

1. Определите, при каких значениях параметра a

а) уравнение $|x| = a + 3$ имеет один корень

б) уравнение $|x| = a + 1$ имеет 2 корня

в) уравнение $|x| = a - 4$ имеет 2 корня

2. Решите уравнение с параметром:

а) $ax = 5$

б) $(a - 3)x = -1$

в) $(a + 1)x = a + 1$

г) $ax = -2$

д) $(a - 3)x = -1$

е) $(a - 2)x = 2(a - 2)$

ё) $(a - 3)x = 3 - a$

ж) $(a + 4)x = 3(a + 4)$